

9. cvičení - řešení

Příklad 1 (a)

$$f(x) = |x|$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Derivace f

$$\text{Platí, že } f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0) \\ 0, & x = 0 \\ x, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Počítejme f' na intervalech $(-\infty, 0)$ a $(0, \infty)$ zvlášť. Na závěr vyřešíme bod 0.

Pro $x \in (-\infty, 0)$ platí:

$$f'(x) = (-x)' = -x' = -1$$

Pro $x \in (0, \infty)$ platí:

$$f'(x) = x' = 1$$

V bodě 0 spočteme nejdříve jednostranné derivace. Funkce f je v 0 zleva i zprava spojitá, tedy dle Věty 3.27 o jednostranné derivaci platí, že $f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} -1 = -1$ a $f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 1 = 1$.

V bodě 0 má funkce f pouze jednostranné derivace, neb se neshodují.

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Příklad 1 (b)

$$f(x) = \min\{x^2, -x^2 + 3x\}$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Derivace f

Nejdříve zjistíme, jak ta funkce vlastně „vypadá“. Tj. vyšetřeme, na kterých intervalech je která z funkcí v minimu větší. Řešme tedy následující nerovnost.

$$\begin{aligned} x^2 &< -x^2 + 3x \\ 2x^2 - 3x &< 0 \\ x(2x - 3) &< 0 \\ x \left(x - \frac{3}{2} \right) &< 0 \end{aligned}$$

Řešením nerovnosti je $x \in (0, \frac{3}{2})$. Z toho dostáváme následující.

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \in (0, \frac{3}{2}) \\ -x^2 + 3x, & x \in \mathbb{R} \setminus (0, \frac{3}{2}) \end{cases}$$

Počítejme tedy f' na intervalech $(0, \frac{3}{2})$, $(-\infty, 0)$, $(\frac{3}{2}, \infty)$ zvlášť a pak vyřešme body 0 a $\frac{3}{2}$.
Pro $x \in (0, \frac{3}{2})$ platí:

$$f'(x) = (x^2)' = 2x.$$

Pro $x \in (-\infty, 0) \cup (\frac{3}{2}, \infty)$ platí:

$$f'(x) = (-x^2 + 3x)' = -2x + 3.$$

Opět dle Věty 3.27 o jednostranné derivaci platí následující.

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} 2x = 0$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} -2x + 3 = 3$$

$$f'_+(\frac{3}{2}) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}+} -2x + 3 = 0$$

$$f'_-(\frac{3}{2}) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}-} 2x = 3$$

Jednostranné derivace se neshodují, tedy derivace jako takové v daných bodech neexistují.

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{3}{2}\}$$

Příklad 1 (c)

$$f(x) = |\log |x||$$

Definiční obor f

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Derivace f

Nejdříve vyšetříme funkci. Z definice absolutní hodnoty plyne, že:

$$f(x) = \begin{cases} \log x, & x \in [1, \infty) \\ -\log x, & x \in (0, 1) \\ -\log(-x), & x \in (-1, 0) \\ \log(-x), & x \in (-\infty, -1] \end{cases}$$

Počítejme na intervalech zvlášť.

$$x \in (1, \infty) \implies f'(x) = (\log x)' = \frac{1}{x}$$

$$x \in (0, 1) \implies f'(x) = (-\log x)' = -\frac{1}{x}$$

$$x \in (-1, 0) \implies f'(x) = (-\log(-x))' = -\frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x} \cdot (-1) = -\frac{1}{x}$$

$$x \in (-\infty, -1) \implies f'(x) = (\log(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-x)' = \frac{1}{x}$$

Dále platí dle Věty 3.27 o jednostranné derivaci:

$$f'_-(-1) = \lim_{x \rightarrow -1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1-} \frac{1}{x} = -1$$

$$f'_+(-1) = \lim_{x \rightarrow -1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1+} -\frac{1}{x} = 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{x \rightarrow 0-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} -\frac{1}{x} = \infty$$

$$f'_+(0) = \lim_{x \rightarrow 0+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} -\frac{1}{x} = -\infty$$

$$f'_-(1) = \lim_{x \rightarrow 1-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} -\frac{1}{x} = -1$$

$$f'_+(1) = \lim_{x \rightarrow 1+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} \frac{1}{x} = 1$$

V bodech $\{-1, 0, 1\}$ jednostranné derivace buď neexistují (vycházejí nekonečno) nebo nevycházejí stejně. Proto ve zmíněných bodech derivace neexistují.

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

Příklad 1 (d)

Definiční obor $f(x) = e^{\log|x|}$

$$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Všimněme si, že na definičním oboru lze funkci přepsat jako $f(x) = |x|$

$$\text{Pak } f(x) = \begin{cases} -x, & x \in (-\infty, 0) \\ x, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Derivace f

$$f'(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 0) \\ 1, & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

Příklad 1 (e)

Definiční obor $f(x) = \begin{cases} x, & x \in (-\infty, 0] \\ \log(1+x) & x \in (0, \infty). \end{cases}$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Derivace f

Derivujeme pouze na otevřených intervalech, krajní bod vyřešíme zvlášť.

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x \in (-\infty, 0) \\ \frac{1}{1+x} & x \in (0, \infty). \end{cases}$$

V nule vyšetříme z definice:

$$f'_+(0) = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\log(1+h) - \log(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{\log(1+h)}{h} \stackrel{\text{známá}}{=} \lim 1$$

$$f'_-(0) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{0+h-0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{h}{h} = 1$$

Tedy limita v nule je rovna jedné (protože se jednostranné limity rovnají).

Definiční obor f'

$$D(f') = \mathbb{R}$$

Příklad 2 (a)

Definiční obor $f(x) = \frac{1}{\log x}$

Zlomek $\implies \log x \neq 0 \implies x \neq 1$

Logaritmus $\implies x > 0$.

Tedy $D(f) = (0, 1) \cup (1, \infty)$.

Derivace f

$$x \in D(f) \implies f'(x) = \left(\frac{1}{\log x} \right)' = -\frac{1}{\log^2 x} \cdot (\log x)' = -\frac{\frac{1}{x}}{\log^2 x}$$

Definiční obor f'

Derivace je definována na celém $D(f)$.

Příklad 2 (b)

Definiční obor $f(x) = \cos^9(x^3 - x + 2)$

Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$.

Derivace f

Derivujeme dle složené funkce.

$$\begin{aligned} (\cos^9(x^3 - x + 2))' &= 9 \cdot \cos^8(x^3 - x + 2) \cdot (\cos(x^3 - x + 2))' = \\ &= 9 \cos^8(x^3 - x + 2) \cdot (-\sin(x^3 - x + 2)) \cdot (x^3 - x + 2)' = \\ &= 9(3x^2 - 1) \cos^8(x^3 - x + 2) \cdot (-\sin(x^3 - x + 2)) \end{aligned}$$

Definiční obor f'

Zřejmě $D(f') = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (c)

Definiční obor $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$

Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$.

Derivace f

Opět derivujeme jako složenou funkci.

$$\begin{aligned} (\sin(\sin(\sin x)))' &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot (\sin(\sin x))' = \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot (\sin x)' = \\ &= \cos(\sin(\sin x)) \cdot \cos(\sin x) \cdot \cos x \end{aligned}$$

Definiční obor f'

Zřejmě $D(f') = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (d)**Definiční obor $f(x) = 2 \log \frac{x^2-1}{x^2+1}$**

Zlomek $\implies x^2 + 1 \neq 0$, což je splněno.

Logaritmus $\implies \frac{x^2-1}{x^2+1} > 0 \implies (x-1)(x+1) > 0 \implies x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Tedy $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Derivace f

$$\begin{aligned} \left(2 \log \frac{x^2-1}{x^2+1} \right)' &= \frac{2}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^2+1} \right)' = \frac{2}{\frac{x^2-1}{x^2+1}} \cdot \frac{(x^2-1)'(x^2+1) - (x^2-1)(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = \\ &= \frac{2(x^2+1)}{x^2-1} \cdot \frac{2x(x^2+1) - (x^2-1) \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{2}{x^2-1} \cdot \frac{2x^3+2x-2x^3+2x}{x^2+1} = \frac{8x}{(x^2-1)(x^2+1)} \end{aligned}$$

Definiční obor f'

Definiční obor spočteného výrazu je $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Tedy derivace je definovaná na $D(f)$. Tedy $D(f') = D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

Příklad 2 (e)**Definiční obor $f(x) = \sin^2 x - \sin(x^2)$**

Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$.

Derivace f

$$\begin{aligned} (\sin^2 x - \sin(x^2))' &= 2 \sin x \cdot (\sin x)' - \cos(x^2) \cdot (x^2)' = \\ &= 2 \sin x \cdot \cos x - \cos(x^2) \cdot 2x = \sin(2x) - 2x \cos(x^2) \end{aligned}$$

Definiční obor f'

Zřejmě $D(f') = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (f)**Definiční obor $f(x) = \log(\log^2(\log^3(x)))$**

Postupujme zevnitř při určování podmínek.

$$\log^3(x) \implies x > 0$$

$$\log^2(\log^3(x)) \implies \log^3(x) > 0 \implies \log(x) > 0 \implies x > 1$$

$$\log(\log^2(\log^3(x))) \implies \log^2(\log^3(x)) > 0 \implies \log(\log^3(x)) \neq 0 \implies \log^3(x) \neq 1 \implies \log(x) \neq 1 \implies x \neq e$$

Tedy $D(f) = (1, e) \cup (e, \infty)$

Derivace f

$$\begin{aligned}
(\log(\log^2(\log^3(x))))' &= \frac{1}{\log^2(\log^3(x))} \cdot (\log^2(\log^3(x)))' = \frac{1}{\log^2(\log^3(x))} \cdot 2 \log(\log^3(x)) \cdot (\log(\log^3(x)))' = \\
&= \frac{2 \log(\log^3(x))}{\log^2(\log^3(x))} \cdot \frac{1}{\log^3(x)} \cdot (\log^3(x))' = \frac{2}{\log(\log^3(x))} \cdot \frac{3 \cdot \log^2(x)}{\log^3(x)} \cdot (\log(x))' = \frac{6}{\log(\log^3(x)) \cdot \log(x) \cdot x}
\end{aligned}$$

Definiční obor f'

Zřejmě musí být splněno následující:

$$x \neq 0$$

$$\log x \neq 0 \implies x \neq 1$$

$$\log(\log^3(x)) \neq 0 \implies \log^3(x) \neq 1 \implies x \neq e$$

Zřejmě tedy $D(f') = D(f) = (1, e) \cup (e, \infty)$.

Příklad 2 (g)

Definiční obor $f(x) = \max\{-x^2, 2x - 3\}$

Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$.

Dále platí následující.

$$-x^2 \geq 2x - 3 \iff x^2 + 2x - 3 \leq 0 \iff (x + 1)^2 - 4 \leq 0 \iff (x + 1)^2 \leq 4 \iff |x + 1| \leq 2 \iff x \in [-3, 1]$$

$$\text{Tedy: } f(x) = \begin{cases} -x^2, & x \in [-3, 1], \\ 2x - 3, & x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty) \end{cases}$$

Derivace f

Klasickým způsobem (aritmetika limit, známé vzorce atd.) lze počítat derivaci pouze na množinách $(-\infty, -3), (-3, 1), (1, \infty)$. V bodech $-3, 1$ je třeba použít Věty 3.27 o jednostranné derivaci (v těchto bodech se funkce z jedné a druhé strany chová jinak. proto se počítají nejdříve jednostranné derivace a pokud by vyšly stejně, tak tam máme i derivaci).

$$x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty) \implies f'(x) = (2x - 3)' = 2$$

$$x \in (-3, 1) \implies f'(x) = (-x^2)' = -2x$$

$$f'_-(-3) \stackrel{3.27}{=} \lim_{x \rightarrow -3-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -3-} 2 = 2$$

$$f'_+(-3) \stackrel{3.27}{=} \lim_{x \rightarrow -3+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -3+} (-2x) \stackrel{\text{spoj.}}{=} -2 \cdot (-3) = 6$$

$$f'_-(1) \stackrel{3.27}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} (-2x) \stackrel{\text{spoj.}}{=} -2$$

$$f'_+(1) \stackrel{3.27}{=} \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} 2 = 2$$

Vidíme, že v bodech -3 a 1 existují pouze jednostranné derivace.

Definiční obor f'

$$\text{Zřejmě máme } f'(x) = \begin{cases} 2, & x \in (-\infty, -3) \cup (1, \infty) \\ -2x, & x \in (-3, 1) \end{cases}$$

A $D(f') = \mathbb{R} \setminus \{-3, 1\}$.

Příklad 2 (h)

$$\text{Definiční obor } f(x) = \begin{cases} 1-x, & x \in (-\infty, 1) \\ (1-x)(2-x), & x \in [1, 2] \\ -(2-x), & x \in (2, \infty) \end{cases}$$

Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$.

Derivace f

Na otevřených intervalech spočítáme klasicky, krajní body intervalů (kde se fce chová z každé strany jinak) vyřešíme zvlášť přes jednostranné derivace...

$$x \in (-\infty, 1) \implies f'(x) = (1-x)' = -1$$

$$x \in (1, 2) \implies f'(x) = ((1-x)(2-x))' = (2-3x+x^2)' = 2x-3$$

$$x \in (2, \infty) \implies f'(x) = (-(2-x))' = 1$$

$$f'_+(1) \stackrel{3.27}{=} \lim_{x \rightarrow 1+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+} (2x-3) \stackrel{\text{spoj.}}{=} 2-3 = -1$$

$$f'_-(1) \stackrel{3.27}{=} \lim_{x \rightarrow 1-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-} -1 = -1$$

$$f'_+(2) \stackrel{3.27}{=} \lim_{x \rightarrow 2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} 1 = 1$$

$$f'_-(2) \stackrel{3.27}{=} \lim_{x \rightarrow 2-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} (2x-3) \stackrel{\text{spoj.}}{=} 4-3 = 1$$

Vidíme, že v bodech 1, 2 vycházejí jednostranné derivace stejně, tedy tam má funkce i derivaci.

$$\text{Platí: } f'(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-\infty, 1] \\ 2x-3, & x \in (1, 2] \\ 1, & x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Definiční obor f'

Zřejmě $D(f') = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (i)

$$\text{Definiční obor } f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$.

Derivace f

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \implies f'(x) &= \left(x^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)' = 2x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \cdot \left(\sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)' = \\ &= 2x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)' = 2x \cdot \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} + x^2 \cdot \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{-1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4}} = \\ &= 2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \end{aligned}$$

$$f'_+(0) \stackrel{3.27}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0+} \left(2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) = 0 \quad (0 \cdot \text{om.})$$

$$f'_-(0) \stackrel{3.27}{=} \lim_{x \rightarrow 0-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0-} \left(2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3} x^{\frac{2}{3}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right) = 0 \quad (0 \cdot \text{om.})$$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{\sqrt[3]{x}} - \frac{1}{3}x^{\frac{2}{3}} \cos \frac{1}{\sqrt[3]{x}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Definiční obor f'

Zřejmě $D(f') = \mathbb{R}$.

Příklad 2 (j)

$$\text{Definiční obor } f(x) = \begin{cases} -1, & x > 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases}$$

Zřejmě $D(f) = \mathbb{R}$.

Derivace f

Opět nejdříve po otevřených intervalech a pak v krajních bodech zvlášť.

$$x > 0 \implies f'(x) = (-1)' = 0$$

$$x < 0 \implies f'(x) = (1)' = 0$$

Pozor: funkce f není v bodech $-1, 1$ spojitá ani zleva a ani zprava. Nelze proto použít větu 3.27 o jednostranné derivaci. Jednostranné derivace v těchto bodech se proto musí spočítat z definice.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &\stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+} \frac{-1 - \frac{1}{2}}{h} = -\infty \\ f'_-(0) &\stackrel{\text{def.}}{=} \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0-} \frac{1 - \frac{1}{2}}{h} = -\infty \end{aligned}$$

Definiční obor f'

$D(f') = \mathbb{R}$

Příklad 3 (a)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{22x^6 + 20x - 42}{x^{40} - 3x + 2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{132x^5 + 20}{40x^{39} - 3} = \frac{152}{37}$$

Příklad 3 (b)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\pi}{2} - \arccos x}{x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{1} = 1$$

Příklad 3 (c)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^2 \sin x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{2x \sin x + x^2 \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{x^2}{2x \sin x + x^2 \cos x} \stackrel{\text{VOAL}}{=} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \end{aligned}$$

Kde v rovnosti s VOAL jsme vyřešili první zlomek pomocí známé limity a druhý zlomek opět pomocí L'H:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{2 \sin x + x \cos x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos x + \cos x - x \sin x} = \frac{1}{3}$$

Příklad 3 (d)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cotan(x) - 1}{x^2}$$

Vyšetřeme nejdříve limitu čitatele a jmenovatele zvlášť, abychom věděli, zda můžeme použít l'Hospitala.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} x \cotan(x) - 1 &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cos x - 1 \stackrel{\text{ZL} + \text{VoAL} + \text{spoj.}}{=} 1 \cdot 1 - 1 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 &\stackrel{\text{spoj.}}{=} 0 \end{aligned}$$

Je splněna podmínka (i) z l'Hospitala, pokud $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cotan x - 1)'}{(x^2)'}$ existuje, pak jsou splněny předpoklady l'Hospitala a zmíněná limita se bude rovnat zadané.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cotan(x) - 1}{x^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cotan x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cotan x - \frac{x}{\sin^2 x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - x}{2x \sin^2 x}$$

V poslední limitě zřejmě vychází $\frac{0}{0}$. Zkusme tedy opět použít l'Hospitala.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \sin x - x}{2x \sin^2 x} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos x \sin x - x)'}{(2x \sin^2 x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2 x + \cos^2 x - 1}{2 \sin^2 x + 4x \sin x \cos x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2 x}{2 \sin x (\sin x + 2x \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\sin x + 2x \cos x} \end{aligned}$$

V poslední limitě zřejmě vychází $\frac{0}{0}$. Zkusme tedy opět použít l'Hospitala.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{\sin x + 2x \cos x} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-\sin x)'}{(\sin x + 2x \cos x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{\cos x + 2 \cos x - 2x \sin x} \stackrel{\text{spoj.} + \text{VoAL}}{=} \frac{-1}{1 + 2 - 0} = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

Poslední limita existuje, tedy jsme mohli použít ve všech případech l'Hospitala.

Příklad 3 (e)

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \log(x) \cdot \log(1-x) = \lim_{x \rightarrow 1-} \frac{\log(1-x)}{\frac{1}{\log(x)}}$$

Dále platí.

$$\lim_{x \rightarrow 1-} \left| \frac{1}{\log(x)} \right| = \infty$$

Zkusme použít l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \log(x) \cdot \log(1-x) \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\log(1-x))'}{\left(\frac{1}{\log(x)}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(1-x)^{-1} \cdot (-1)}{-\frac{1}{x \cdot \log^2(x)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \cdot \log^2(x)}{1-x}$$

Poslední limita vychází $\frac{0}{0}$. Použijme l'Hospitala.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x \cdot \log^2(x)}{1-x} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x \cdot \log^2(x))'}{(1-x)'} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\log^2(x) + 2 \log(x)}{-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} -\log^2(x) - 2 \log(x) = 0 \end{aligned}$$

Poslední limita existuje, tedy jsme mohli použít ve všech případech l'Hospitala.

Příklad 3 (f)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3}$$

Zřejmě vychází $\frac{0}{0}$, použijme tedy l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x - 2 \arcsin x}{x^3} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\arcsin 2x - 2 \arcsin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2}$$

Poslední limita vychází $\frac{0}{0}$. Použijme l'Hospitala.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2}{\sqrt{1-4x^2}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}}{3x^2} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{8x}{\sqrt{(1-4x^2)^3}} - \frac{2x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{6x} \stackrel{\text{VoAL} \pm \text{spoj.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{8}{\sqrt{(1-4x^2)^3}} - \frac{2}{\sqrt{(1-x^2)^3}}}{6} \stackrel{\text{VoAL} \pm \text{spoj.}}{=} 1$$

Poslední limita existuje, tedy jsme mohli použít ve všech případech l'Hospitala.

Příklad 3 (g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 + \cos x - \sin x}{\log^3(1+x)}$

Limita vychází jako $\frac{0}{0}$. Lze tedy použít l'Hospitala. Derivovat však $\log^3(1+x)$ (potenciálně několikrát) není úplně příjemné. Dá se tomu však vyhnout využitím známé limity $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$.

Níže vždy při užití l'Hospitala nastala situace $\frac{0}{0}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 + \cos x - \sin x}{\log^3(1+x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{\log^3(1+x)} \cdot \frac{e^x - 2 + \cos x - \sin x}{x^3} = \\ &\stackrel{\text{VoAL} \pm \text{ZL}}{=} 1^3 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 2 + \cos x - \sin x}{x^3} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - \cos x}{3x^2} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x + \sin x}{6x} = \\ &\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x + \cos x}{6} \stackrel{\text{spoj.}}{=} \frac{e^0 + 0 + \cos 0}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Příklad 3 (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} n^3 \left(\sin\left(\frac{1}{n}\right) - \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)$

Použijeme Heineho. Stačí to tedy vypočítat jako limitu funkce a pak dle Heineho výsledná limita je i naší limitou.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) - \log \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin \left(\frac{1}{x} \right) - \log \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x^3}} = \left| z \text{ VOLSF(P) vychází } \frac{0}{0} \right| = \\
&\stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{1+\frac{1}{x}} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-3}{x^4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cos \left(\frac{1}{x} \right) - \frac{1}{1+\frac{1}{x}}}{\frac{3}{x^2}} = \left| z \text{ VOLSF(P) vychází } \frac{0}{0} \right| = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sin \left(\frac{1}{x} \right) \cdot \frac{-1}{x^2} - \frac{-1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} \cdot \frac{-1}{x^2}}{\frac{-6}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sin \left(\frac{1}{x} \right) + \frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2}}{\frac{6}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{6} \left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^2} - \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{6 \left(1+\frac{1}{x}\right)^2} - \frac{1}{6} \frac{\sin \left(\frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} \right) \stackrel{\text{VoAL} + \text{spoj.}}{=} \stackrel{+ \text{VOLSF(P)} + \text{ZL}}{=} \infty - \frac{1}{6} = \infty
\end{aligned}$$

Příklad 3 (i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{\sin x}{x} \right)}{x^2}$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log \left(\frac{\sin x}{x} \right)}{x^2} &= \left| z \text{ VOLSF (S) vychází } \frac{0}{0} \right| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\sin x} \cdot \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{2x^2 \sin x} = \left| z \text{ VoAL} + \text{spoj. vychází } \frac{0}{0} \right| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - x \sin x - \cos x}{4x \sin x + 2x^2 \cos x} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x \sin x}{4x \sin x + 2x^2 \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{4 \sin x + 2x \cos x} = \left| z \text{ VoAL} + \text{spoj. vychází } \frac{0}{0} \right| = \\
&\stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{4 \cos x + 2 \cos x - 2x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\cos x}{6 \cos x - 2x \sin x} \stackrel{\text{VoAL} + \text{spoj.}}{=} \frac{-1}{6 + 2 \cdot 0 \cdot 0} = -\frac{1}{6}
\end{aligned}$$

Příklad 3 (j) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2x^2} = 0$$

Příklad 3 (k) $\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \log x$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \log x = |0 \cdot (-\infty)| = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} = \left| \frac{-\infty}{\infty} \right| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+} (-x) \stackrel{\text{spoj.}}{=} 0$$

Příklad 3 (l) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

Příklad 3 (m) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \arctan x) \log x$

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} (\pi - 2 \arctan x) \log x &= |0 \cdot \infty| = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctan x}{\frac{1}{\log x}} = \left| \frac{0}{0} \right| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2 \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\frac{-1}{\log^2 x} \frac{1}{x}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \cdot \frac{1}{1+x^2}}{\frac{1}{\log^2 x} \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x \log^2 x}{1+x^2} = \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \log^2 x + 4x \log(x) \frac{1}{x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log^2 x + 2 \log x}{x} = \\
&= \left| \frac{\infty}{\infty} \right| \stackrel{\text{rH}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \log(x) \frac{1}{x} + \frac{2}{x}}{1} \stackrel{\text{vOAL}}{=} 0
\end{aligned}$$

V posledním kroku jsme využili faktu: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ z předchozího příkladu.